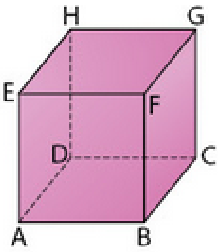
TD : géométrie dans l'espace (1)

26 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Réaliser la figure et construire les points P, Q, R et S tels que :



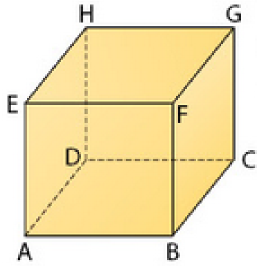
a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$

c) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

28 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Démontrer chaque égalité.



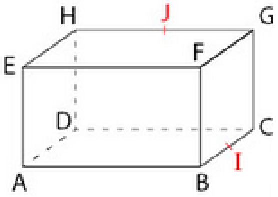
a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF}$

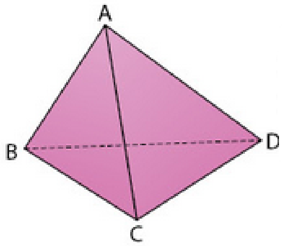
29 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [HG].
Recopier et compléter chaque égalité avec le point de la figure qui convient.



a) $\overrightarrow{F\bullet} = 2\overrightarrow{IC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ **b)** $\overrightarrow{A\bullet} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{G\bullet} = -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ **d)** $\overrightarrow{\bullet J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Pour les exercices 30 à 32, ABCD est un tétraèdre.
Si besoin, réaliser une figure telle que celle ci-contre.



30 **a)** Recopier et compléter l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \ldots + \overrightarrow{CD}$$

b) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

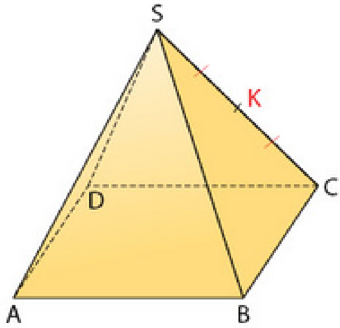
31 I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [AD] et [BC].
a) Justifier que $2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la nature du quadrilatère ILJK.

32 I est le milieu de l'arête [AB], J le milieu de l'arête [CD] et O le milieu du segment [IJ].
a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}.$$

b) En déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

33 SABCD est une pyramide de base le parallélogramme ABCD.
K est le milieu de l'arête [SC].
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SC}$.

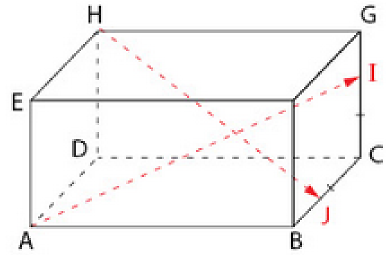


34 ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de l'arête [AD] et les points E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{IF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}.$$

a) Réaliser une figure.
b) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

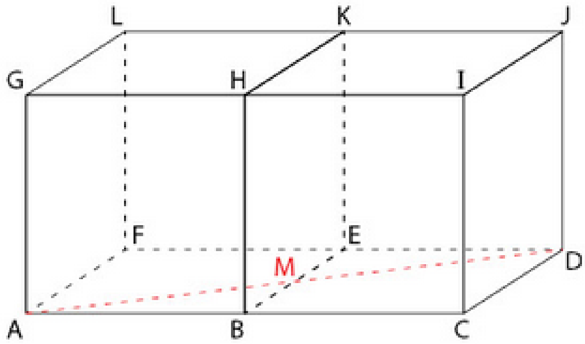
35 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définis par :



$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} \text{ et } \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.

36 La figure ci-dessous est constituée de deux cubes identiques accolés par une face.



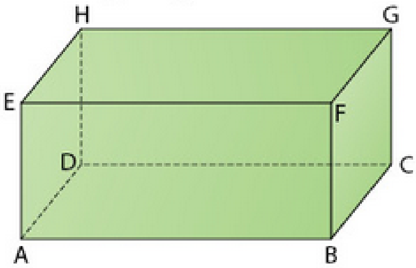
M est le point d'intersection des segments [AD] et [BE].
Dans chaque cas, exprimer le vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$.

a) $\overrightarrow{AM}$ **b)** $\overrightarrow{KM}$ **c)** $\overrightarrow{MF}$

d) $\overrightarrow{LM}$ **e)** $\overrightarrow{MJ}$ **f)** $\overrightarrow{IM}$

Conseil : commencer par préciser et justifier la position du point M sur [BE].

Pour les exercices 40 à 42, ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.



40 Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont colinéaires.

41 Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

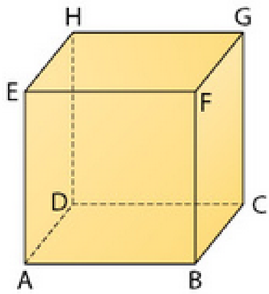
42 P est le point tel que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FG}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires.

43 ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de [BC], les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

a) Réaliser une figure.
b) Démontrer que $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{FE}$.
c) Le point E appartient-il à la droite (FG) ? Justifier la réponse.

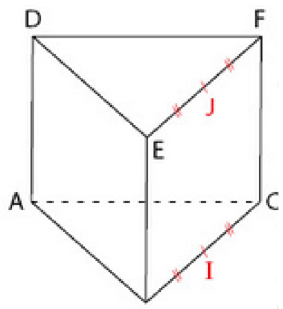
44 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I, J et K sont les points définis par :



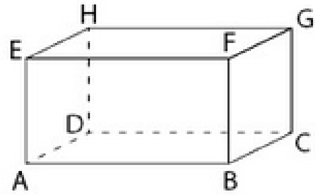
- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,
- $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$,
- $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

a) Réaliser la figure et construire les points I, J et K.
b) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (BE) ?
c) Les droites (JK) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

52 ABCDEF est le prisme droit représenté ci-contre.
I et J sont les milieux des arêtes [BC] et [EF].
M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{JC}$.
Démontrer que le point M appartient au plan $(A\,;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AI})$.



45 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

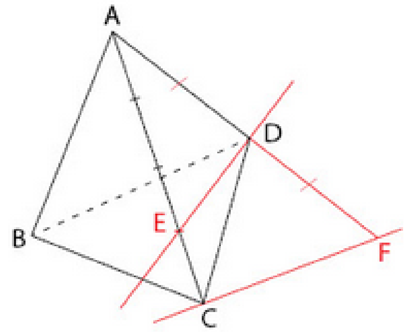


Les points I et J sont définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}.$$

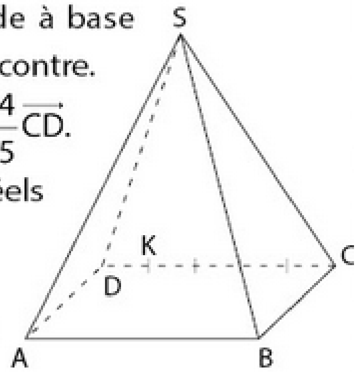
a) Réaliser une figure.
b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
c) Les droites (IJ) et (AG) sont-elles :
- parallèles ?
- coplanaires ?

46 ABCD est un tétraèdre.
Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}$.



a) Justifier que les droites (DE) et (CF) sont coplanaires.
b) Démontrer que ces deux droites sont sécantes.

53 SABCD est la pyramide à base rectangulaire représentée ci-contre.
K est le point défini par $\overrightarrow{CK}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$.



a) Justifier qu'il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}.$$

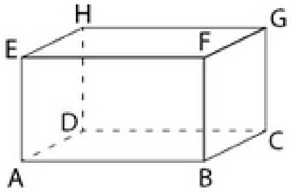
b) Déterminer ces deux nombres réels.

54 ABCD est un tétraèdre et M est le point défini par :

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.$$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
b) À quel plan contenant une face du tétraèdre le point M appartient-il ?

55 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



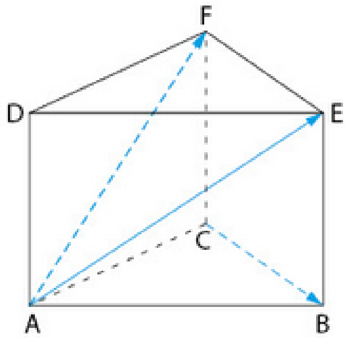
K est le point défini par :

$$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{HK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HG}$.

b) En déduire un plan qui contient le point K.

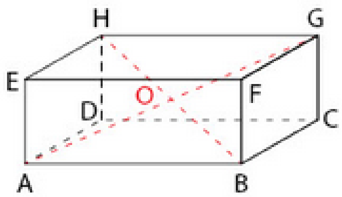
56 ABCDEF est le prisme droit ci-contre.



a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont coplanaires.

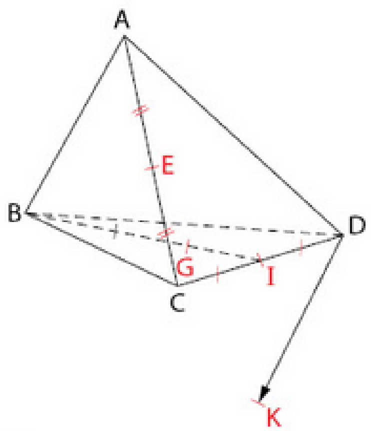
57 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre le point O.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

87 ABCD est un tétraèdre. E est le milieu de [AC] et I celui de [CD]. K est le point tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB}$ et G est le point tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.



Démontrer que les points E, G et K sont alignés.

88 ABCD est un tétraèdre.

M, N, P et Q sont les points définis par :

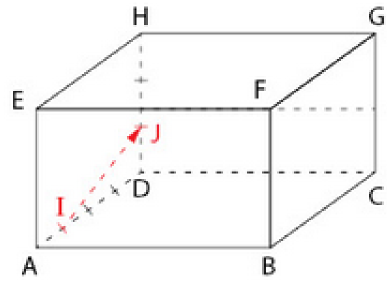
$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

a) Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

c) Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.

58 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

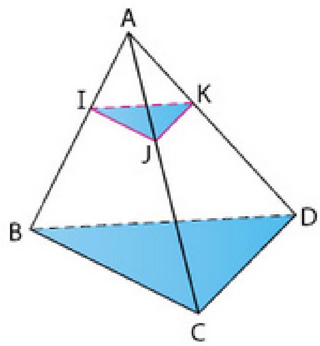
b) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).

59 ABCD est un tétraèdre.

I, J et K sont les points définies par :

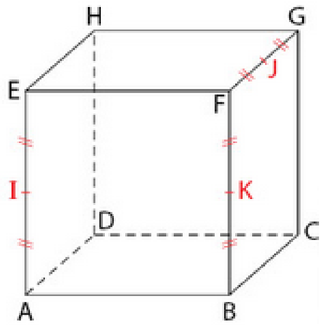
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

89 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [FG] et [BF].

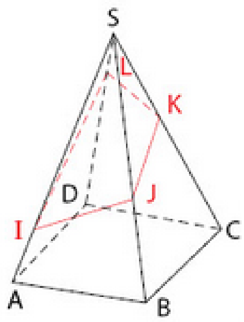
a) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire la position relative de la droite (IJ) par rapport au plan (AKD).

90 SABCD est une pyramide à base carrée. Les points I, J, K et L sont définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AS}$,

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BS},\ \overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CS}$$

et $\overrightarrow{DL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DS}$.



a) Justifier que $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ dans cette base.

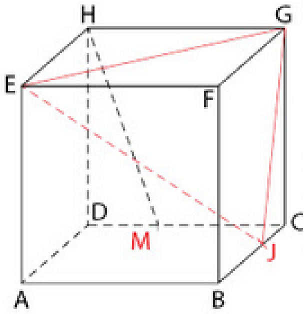
c) Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ? Justifier.

91 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
M et J sont les points définis par :

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

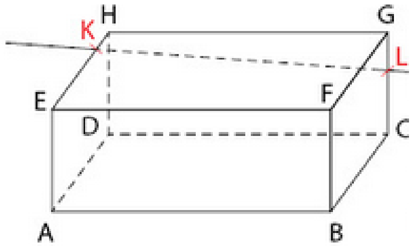
a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

b) En déduire la position relative de la droite (HM) et du plan (EGJ).



92 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
K et L sont les points définis par :

$\overrightarrow{HK} = \lambda\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GL} = \lambda\overrightarrow{GC}$ où λ est un nombre réel.



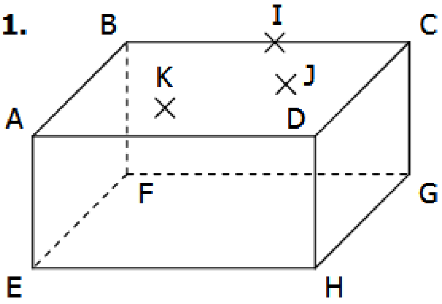
a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{KL}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont-ils coplanaires ?

c) Déterminer la position relative de la droite (KL) et du plan (CEF).

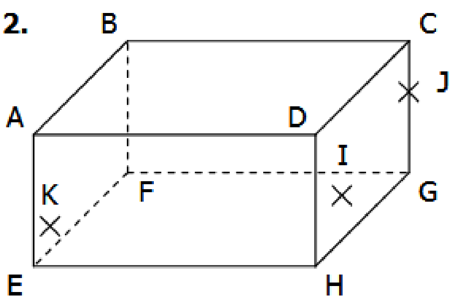
EXERCICE 2D.1

1.



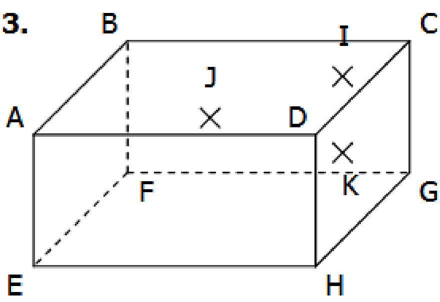
$I \in [BC]$
$J \in (BCG)$
$K \in (ABC)$

2.



$I \in (CDG)$
$J \in (CDG)$
$K \in (ABE)$

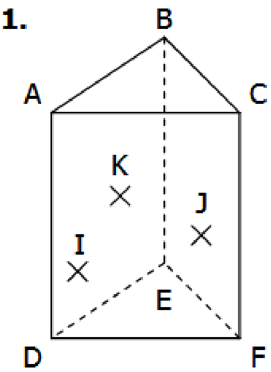
3.



$I \in (BCD)$
$J \in (BCD)$
$K \in (CDG)$

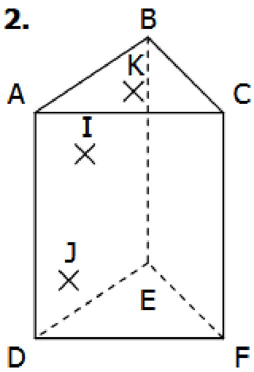
EXERCICE 2D.2

1.



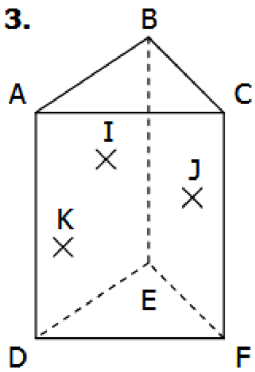
$I \in (ACD)$
$J \in (ACD)$
$K \in (ABD)$

2.



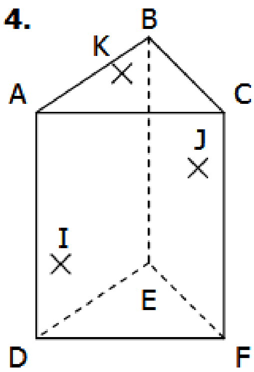
$I \in (ABD)$
$J \in (ABD)$
$K \in (ABC)$

3.



$I \in (ABD)$
$J \in (BCE)$
$K \in (ABD)$

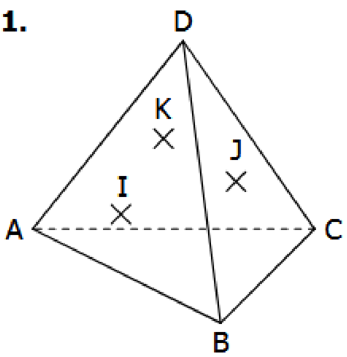
4.



$I \in (ACD)$
$J \in (ACD)$
$K \in (ABC)$

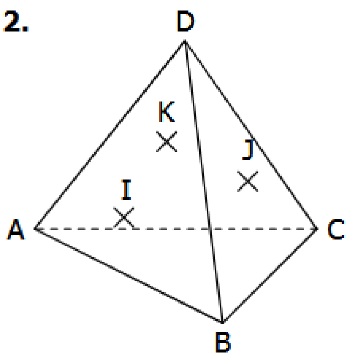
EXERCICE 2D.3

1.



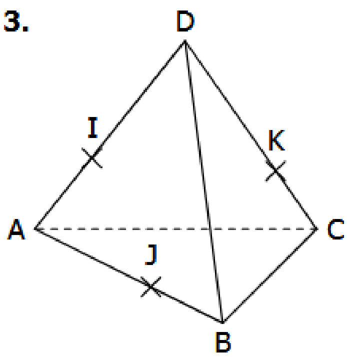
$I \in (ABD)$
$J \in (BCD)$
$K \in (ABD)$

2.



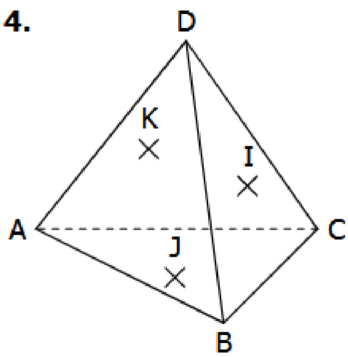
$I \in (ACD)$
$J \in (BCD)$
$K \in (ACD)$

3.



$I \in [AD]$
$J \in [AB]$
$K \in [CD]$

4.



$I \in (ACD)$
$J \in (ABC)$
$K \in (ACD)$